Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire comprend un ensemble de méthodes qui permettent de déterminer le nombre de tous les résultats possibles d'une expérience particulière.

L' analyse combinatoire est un ensemble de techniques de dénombrement qui peuvent être particulièrement utiles en calcul des probabilités lorsqu'il faut dénombrer le nombre de résultats appartenant à un événement donné.

Arrangements

Arrangements avec répétition

Un arrangement de n objets p à p avec répétition est un arrangement où chaque objet peut être répété jusqu' à p fois.

Soit un ensemble M de n éléments distincts $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Pour tout entier $p \geq 2$, on définit l'ensemble M^p des p-uples constitués d'éléments non nécessairement distincts de M, chaque p-uples constitués est appelé p-arrangements avec répétition.

Exemple

Soit un ensemble de 3 lettres {a, b, c}, exprimer l'ensemble de tout les arrangements avec répétition possible avec ces 3 lettres prise 2 à 2.

(a,a)	(a,b)	(a,c)
(b,b)	(b,a)	(b,c)
(c,c)	(c,b)	(c,a)

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

$$\mathbf{A_p^n = n^p}$$

Exercices

AC1) Combien peut-on écrire de nombre de 3 chiffres distincts de 0 ?

Solution : *Soit M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}*
Il y autant de nombre de 3 chiffres distincts de 0 qu'il y a d'arrangements à répétition de 9 chiffres pris 3 à 3.

$$A_9^3 = 9^3 = 729$$

AC2) Déterminer le nombre de mots que l'on peut écrire à l'aide de 4 voyelles.

Solution : *Soit M = {a, e, i, o, u, y}*
Il a autant de mots de 4 voyelles qu'il y a d'arrangements à répétition de 6 voyelles pris 4 à 4.

$$A_6^4 = 6^4 = 1.296$$

Arrangements sans répétition

Un arrangement de n éléments p à p (n $\geq$ p) est tout ensemble ordonné de p de ces éléments, tous distincts.

Soit un ensemble M de n éléments distincts M = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

On appel arrangement de ces n éléments pris p à p , toute suite de p éléments distincts prélevés dans M, l'ordre de rangement des p éléments distinguant un arrangement d'un autre arrangement.

Exemple

Soit un ensemble de 3 lettres {a, b, c}, exprimer l'ensemble de tout les arrangements avec répétition possible avec ces 3 lettres prise 2 à 2.

(a,b)	(a,c)
(b,a)	(b,c)
(c,b)	(c,a)

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

$$\mathbf{A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exercices

AC3) Déterminer le nombre de tiercé possible dans une course comprenant 14 chevaux.

Solution : *Il s'agit de déterminer le nombre de classement des 3 chevaux parmi 14.*
Il est évident que dans chaque tiercé, on ne prend en compte une fois le même cheval (Un même cheval ne peut occuper qu'une place par tiercé).

$$A_{14}^{3} = \frac{14!}{(14-3)!} = 2.184$$

AC4) De combien de manières différentes 14 élèves peuvent-ils former une équipe de football, si l'on indique la place que doit occuper chaque joueur ?

Solution : *Il s'agit de créer des listes de 11 joueurs parmi 14 élèves. Chaque élève ne peut être pris qu'une fois par équipe.*

$$A_{14}^{3} = \frac{14!}{(14-11)!} = 14.529.715.200$$

AC5) Déterminer le nombre de mots que l'on peut écrire à l'aide de 4 voyelles distinctes.

Solution : *Soit M = {a, e, i, o, u, y}*
Il a autant de mots de 4 voyelles qu'il y a d'arrangements sans (parce que « distinctes ») répétition de 6 voyelles pris 4 à 4.

$$A_{6}^{4} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

Permutations

Une permutation de n objets est un arrangement ordonné de ces n objets.

Soit un ensemble M de n éléments distincts M = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Une permutation de n éléments est un ensemble rangé de ces n éléments $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou $(a_2, \ldots, a_n, a_1)$ ou …

Exemples

Soit un ensemble de 3 lettres {a, b, c}, exprimer l'ensemble de toute les permutations possible avec ces 3 lettres.

(a, b, c)	(a, c, b)
(b, a, c)	(b, c, a)
(c, a, b)	(c, b, a)

Il existe 6 façons de permuter les 3 lettres entre elles. Il s'agit d'une permutation de 3 lettres parmi 3 lettres.

$$P_3 = 3\ ! = 1\ .\ 2\ .\ 3 = 6$$

Formule

$$\mathbf{P_n = n!}$$

Exercices

AC5) Déterminer le nombre de classement possible des employés d'un service comportant 20 employés.

Solution : $P_{20} = 20\ ! = 2.432.902.008.176.640.000$

AC6) Déterminer le nombre de classement d'une course de 8 chevaux.

Solution : $P_8 = 8\ ! = 40.320$

AC7) Sur le bureau de Michel, il y a 12 livres : 4 de mathématiques, 3 de chimie, 3 de physiques et 2 de biologie. Il faut ranger ces livres sur une tablette.

(a) De combien de façon peut-on ranger ces 12 livres sur la tablette ?

Solution : $P_{12} = 12\ ! = 479.001.600$ *façons de ranger les 12 livres*

(b) Si les livres sont rangés au hasard, quelle est la probabilité que les livres soient regroupés par matière ?

Solution : $p = \dfrac{4!.4!.3!.3!.2!}{12!} = 0{,}0000866$

Le premier facteur du numérateur représente le nombre de permutations des 4 matières. Les facteurs suivants représentent pour chaque matière le nombre de permutations des livres de la même matière.

AC8) De combien de manières différentes 11 élèves peuvent-ils former une équipe de football, si l'on indique la place que doit occuper chaque élève ?

Solution : *Il s'agit de créer des listes de 11 joueurs parmi 11 élèves. Chaque élève ne peut être pris qu'une fois par équipe.*
$P_{11} = 11\,! = 39.916.800$

Combinaisons

n/p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Somme ligne	
0	1												1	2^0
1	1	1											2	2^1
2	1	2	1										4	2^2
3	1	3	3	1									8	2^3
4	1	4	6	4	1								16	2^4
5	1	5	10	10	5	1							32	2^5
6	1	6	15	20	15	6	1						64	2^6
7	1	7	21	35	35	21	7	1					128	2^7
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				256	2^8
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			512	2^9
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		1024	2^10
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	2048	2^11

Tableau 1 : Triangle de Pascal

$$C_6^4 = 15 = \frac{6!}{4!.(6-4)!}$$

Tableau de synthèse

Opérations	Types de groupements	Sorte de groupements	Formules
Successif et avec remise	• Importance de l'ordre • Répétition des éléments • Tous les éléments ne doivent pas être choisis	Arrangements à répétitions de n éléments pris p à p	$\mathbf{A_p^n = n^p}$
Successif et sans remise $p \leq n$	• Importance de l'ordre • Pas de répétition des éléments • Tous les éléments ne doivent pas être choisis	Arrangements sans répétitions de n éléments pris p à p	$\mathbf{A_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$
Successif et sans remise $p = n$	• Importance de l'ordre • Pas de répétition des éléments • Tous les éléments doivent être choisis	Permutation de n éléments	$\mathbf{P_n = n!}$
Simultané Avec $p \leq n$	• Pas d'importance de l'ordre • Pas de répétition des éléments • Tous les éléments ne doivent pas être choisis	Combinaisons sans répétitions de n éléments pris p à p	$\mathbf{C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

Exercices

AC1) Combien peut-on écrire de nombre de 3 chiffres distincts de 0 ?
AC2) Déterminer le nombre de mots que l'on peut écrire à l'aide de 4 voyelles.
AC3) Déterminer le nombre de tiercé possible dans une course comprenant 14 chevaux.
AC4) De combien de manières différentes 14 élèves peuvent-ils former une équipe de football, si l'on indique la place que doit occuper chaque joueur ?
AC5) Déterminer le nombre de mots que l'on peut écrire à l'aide de 4 voyelles distinctes.
AC5) Déterminer le nombre de classement possible des employés d'un service comportant 20 employés.
AC6) Déterminer le nombre de classement d'une course de 8 chevaux.
AC7) Sur le bureau de Michel, il y a 12 livres : 4 de mathématiques, 3 de chimie, 3 de physiques et 2 de biologie. Il faut ranger ces livres sur une tablette.
AC8) De combien de manières différentes 11 élèves peuvent-ils former une équipe de football, si l'on indique la place que doit occuper chaque élève ?

Bibliographie

Statistiques pour la gestion / Pierre – Charles PUPION / DUNOD

http://www.iut-bethune.univ-artois.fr

STT-20694 Probabilité pour ingénieurs / Document 2 / Analyse combinatoire / Claude BELSILE / http://www.mat.ulaval.ca/pages/belsle/

Espace Math 66 / A. ADAM et F. LOUSBERG / De Boeck-Wesmael