

Travaux Dirigés N° 1 de la matière (Radiocommunication)
Enseignant : D. BENATIA

EXERCICE-1 : (Traité pendant le cours)- Cas a

Une onde électromagnétique plane se propage dans un milieu diélectrique parfait. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que :

- 1/- Le champ électrique et magnétique sont perpendiculaires.
- 2/- Le champ électrique et magnétique appartiennent au plan d'onde.
- 3/- Le vecteur $\mathbf{P}=\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}$, possède une seule composante dans la direction de propagation.

Pour les cas suivants : a)- Propagation suivant X ; b)- Propagation suivant Y ; c)- Propagation suivant Z

EXERCICE-2 :

A)- Deux ondes électromagnétiques planes sinusoïdales de même pulsation ω et de même amplitude H_m se propagent dans les directions x et y respectivement. Les champs magnétiques H des deux ondes sont parallèles à OZ. Ecrire en fonction de x, y et t les expressions des grandeurs suivantes :

- 1/- Les composantes du champ magnétique H résultant.
- 2/- Les composantes du champ électrique E résultant.
- 3/- Composantes du vecteur P.

B)- Cette fois les ondes électromagnétiques planes sinusoïdales de même pulsation ω et de même amplitude E_m se propagent dans les directions y et z respectivement. Les champs électriques E des deux ondes sont parallèles à OX. Ecrire en fonction de y, z et t les expressions des grandeurs suivantes :

- 1/- Les composantes du champ électrique E résultant.
- 2/- Les composantes du champ magnétique H résultant.
- 3/- Composantes du vecteur P.

EXERCICE-3 :

On considère un milieu réel caractérisé par :

- ϵ : Constante diélectrique ou permittivité diélectrique
- μ : Perméabilité magnétique
- σ : Constante électrique ou conductivité

En utilisant les équations de Maxwell, trouver l'équation de Helmholtz.

EXERCICE-4 :

Soit un milieu dont $\sigma=0$, $\mu_r=18$ et $\epsilon_r=2$. Dans ce milieu se propage suivant +OZ une onde électromagnétique de fréquence $f=4\text{MHz}$. Le vecteur H pour $t=0$ et au plan $z=0$ atteint la valeur de $2.\text{ex A/m}$. Calculer le vecteur $\mathbf{H}(z, t)$, le vecteur $\mathbf{E}(z,t)$ ainsi que le vecteur Poynting.

EXERCICE-5 :

Pour une onde polarisée dans le plan d'incidence (cas où le champ magnétique est contenu dans le plan d'incidence). Trouver les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en fonction des impédances des milieux et des angles de réflexion et de transmission.

EXERCICE-6 :

1/- Pour une onde polarisée dans le plan d'incidence (cas où le champ électrique est contenu dans le plan d'incidence). Trouver les expressions de H_r , E_r (onde réfléchie) et H_t , E_t (onde transmise) en fonction de H_i et E_i (onde incidente).

2/- Dans le cas où l'onde est polarisée normalement au plan d'incidence (cas où le champ magnétique est contenu dans le plan d'incidence). Trouver les expressions de H_r , E_r (onde réfléchie) et H_t , E_t (onde transmise) en fonction de H_i et E_i (onde incidente).

Solution de l'EX 1 : le cas c)- Propagation suivant Z

1/- Le champ électrique et magnétique sont perpendiculaires :

- D'abord, il faut que : $E \cdot H = |E| \cdot |H| \cdot \cos(\angle E \wedge H) = 0$? Angle $E-H=90^\circ$ c-à-d : E perpendiculaire à H ?

Il faut montrer donc, que le produit scalaire entre le champ électrique E et le champ magnétique H est nul.

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \cos(\angle E \wedge H) = E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y + E_z \cdot H_z = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H}$$

- Pour cela, nous allons utiliser les équations de Maxwell.

On commence par l'équation (1) de Maxwell-Faraday :

$$\text{Rot} \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt} \Leftrightarrow \nabla \wedge \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt} \text{ c-à-d : } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu \frac{d(H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k})}{dt}$$

Puis l'équation (2) de Maxwell-Gauss dans le cas d'un milieu sans charges ($\rho=0, \sigma=0$):

$$\text{Div} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \text{ c-à-d : } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \text{ (le champ électrique ne dépend que de z, donc la dérivé de } E_x \text{ par rapport à x sera nulle)}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \text{ (le champ électrique ne dépend que de z, , donc la dérivé de } E_y \text{ par rapport à x sera nulle)}$$

$$\text{Il reste le terme : } \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = 0 \text{ (La composante longitudinale est nulle)}$$

Même chose pour $\text{Div} \vec{H} = 0$ (l'équation (4) de Maxwell)

$$\text{et par conséquent : } \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow H_z = 0 \text{ (La composante longitudinale est nulle)}$$

Comme la propagation est dans la direction des z alors : le champ E ne dépend que de z

Alors :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\mu \frac{d(H_x \vec{i} + H_y \vec{j})}{dt} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{dH_x}{dt} \Rightarrow \partial E_y = +\mu \frac{dH_x}{dt} \partial z \\ +\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{dH_y}{dt} \Rightarrow \partial E_x = -\mu \frac{dH_y}{dt} \partial z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial E_y = +\mu \frac{dH_x}{dt} \partial z * \frac{dt}{dt} = +\mu \frac{dH_x}{dt} .dt * \frac{\partial z}{dt} \Rightarrow \partial E_y = +\mu \frac{dH_x}{dt} .dt * V_p = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} .dH_x \\ \text{Avec : } \frac{\partial z}{dt} = V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} : \text{Vitesse de propagation} \\ \partial E_x = -\mu \frac{dH_y}{dt} \partial z * \frac{dt}{dt} = -\mu \frac{dH_y}{dt} .dt * \frac{\partial z}{dt} \Rightarrow \partial E_x = -\mu \frac{dH_y}{dt} .dt * V_p = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} .dH_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_y = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_x \\ E_x = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_y \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{E} \cdot \vec{H} = E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y + E_z \cdot H_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (-H_y \cdot H_x + H_x \cdot H_y) = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H}$$

2/- Le champ électrique et magnétique appartiennent au plan d'onde.

Le plan d'onde est le plan qui est perpendiculaire à la direction de propagation +oz donc c'est le plan (XOY).

Et comme E et H possèdent deux composantes respectivement (Ex, Ey) et (Hx, Hy), alors : E et H appartiennent au plan d'onde (XOY).

3/- Le vecteur $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$, possède une seule composante dans la direction de propagation (oz) :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & 0 \\ H_x^* & H_y^* & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{(E_x \cdot H_y^* - E_y \cdot H_x^*)}_{P_z} \vec{k} \text{ (dans la direction de propagation)}$$

$$\text{Alors } \vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \underbrace{(E_x \cdot H_y^* - E_y \cdot H_x^*)}_{P_z} \vec{k} \text{ (est dans la direction de propagation)}$$